

FÍSICA INFORMÁTICA DE GESTIÓN
Soluciones Septiembre de 2001

PROBLEMA 2.1.1

La figura P2.1.1 muestra una distribución discreta de cargas sobre tres vértices de un cuadrado de lado l .

Obtener el potencial y campo eléctrico en el punto P.

Calcular el trabajo que se realiza para trasladar una carga Q desde el punto P hasta el origen de coordenadas O.

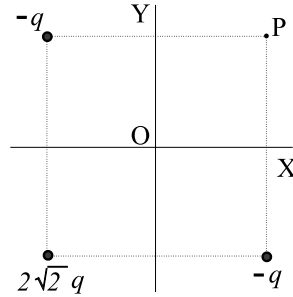


Figura P2.1.1

Solución

1) Campo y potencial

Calculamos en primer lugar el campo en el punto P. Para ello utilizamos la expresión

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_i \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

Donde los vectores de posición del punto P y las distintas cargas son:

$$\mathbf{r} = \frac{l}{2}(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) ; \quad \mathbf{r}_1 = \frac{l}{2}(-\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) ; \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{l}{2}(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) ; \quad \mathbf{r}_3 = \frac{l}{2}(\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y)$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = l\mathbf{u}_x ; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_2 = l(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) ; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_3 = l\mathbf{u}_y$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_3| = l ; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = l\sqrt{2}$$

$$q_1 = -q ; \quad q_2 = 2\sqrt{2}q ; \quad q_3 = -q$$

Sustituyendo los datos anteriores en la expresión del campo eléctrico queda,

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[\frac{q l \mathbf{u}_x}{l^3} + \frac{2\sqrt{2}q l (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y)}{l^3(\sqrt{2})^3} - \frac{q l \mathbf{u}_y}{l^3} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{l^2} [-q \mathbf{u}_x + q(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) - q \mathbf{u}_y]$$

$$\mathbf{E}(P) = 0$$

Potencial

La expresión para el potencial es,

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

Tomando los mismos valores para los vectores de posición que hemos utilizado en el cálculo del campo queda,

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[-\frac{q}{l} + \frac{2\sqrt{2}q}{l\sqrt{2}} - \frac{q}{l} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{l} [-q + 2q - q] = 0$$

$$V(P) = 0$$

2) Trabajo para trasladar Q desde P a O

Calculamos el trabajo necesario para trasladar la carga Q desde el punto P hasta el O utilizando los potenciales en ambos puntos y aplicando después la relación siguiente,

$$W = Q (V(O) - V(P))$$

El potencial en el punto O será,

$$V(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[-\frac{q}{l\sqrt{2}/2} + \frac{2\sqrt{2}q}{l\sqrt{2}/2} - \frac{q}{l\sqrt{2}/2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{2q}{l\sqrt{2}} (2\sqrt{2} - 2)$$

$$V(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{4q}{l\sqrt{2}} (\sqrt{2} - 1)$$

El trabajo necesario será,

$$W = Q (V(O) - V(P)) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{4Qq}{l\sqrt{2}} (\sqrt{2} - 1)$$

PROBLEMA 2.1.2

Dado el circuito indicado en la figura P2.1.2, calcular el circuito equivalente Thévenin visto desde los bornes AB. Obtener el valor de la resistencia R que debemos aplicar en los bornes AB para que la potencia transferida a dicha resistencia sea máxima.

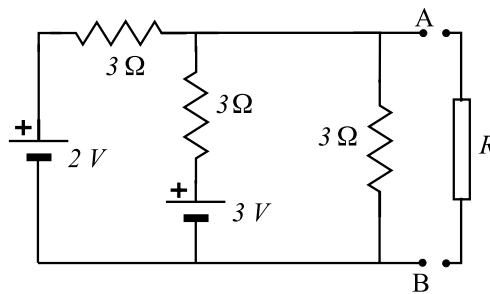


Figura P2.1.2

Solución

Circuito equivalente Thévenin

Aplicamos el método de mallas para obtener la diferencia de potencial en los bornes AB, que es la f.e.m. equivalente E_o .

$$\begin{aligned} 2 - 3 &= (3 + 3)I_1 - 3I_2 \\ 3 &= -3I_1 + (3 + 3)I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 &= 6I_1 - 3I_2 \\ 3 &= -3I_1 + 6I_2 \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema por el método de Cramer para obtener I_2 .

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{18 - 3}{36 - 9} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$$

La diferencia de potencial entre los bornes es,

$$V_{AB} = E_o = 3I_2 = \frac{5}{3} \simeq 1,666 \text{ V}$$

La resistencia equivalente se obtiene cortocircuitando las pilas y calculando la resistencia que se ve desde los bornes AB.

$$\frac{1}{R_o} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$R_o = 1 \text{ } \Omega$$

El circuito equivalente es un generador cuya f.e.m. es,

$$E_o \simeq 1,666 \text{ V} \quad \text{y} \quad R_o = 1 \text{ } \Omega$$

Resistencia R

El teorema de máxima transferencia de potencia dice que $R = R_o$ para que se cumpla la citada condición., por tanto,

$$R = R_o = 1 \text{ } \Omega$$

PROBLEMA 2.1.3

Un diodo de 400 mW se alimenta con una pila de 15 voltios (V) a través de una resistencia limitadora de $R \text{ } \Omega$. El diodo tiene una tensión umbral de 0,8 V y una resistencia equivalente serie $r_d = 50 \text{ } \Omega$, véase la figura P2.1.3. Si disponemos de dos resistencias, $R_1 = 120 \text{ } \Omega$ y $R_2 = 147 \text{ } \Omega$, ¿cual debemos emplear como resistencia limitadora R para que el diodo no se estropee?

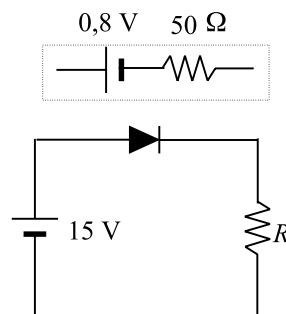


Figura P2.1.3

Solución

La corriente se calcula teniendo en cuenta que la potencia máxima es de la forma siguiente,

$$P_{d,máx} = I(r_d I + V_\gamma)I = 400 \cdot 10^{-3} = 0,4$$

$$50I^2 + 0,8I - 0,4 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son,

$$I = \frac{-0,8 \pm \sqrt{0,64 + 80}}{100}$$

Como la corriente no puede ser negativa,

$$I \simeq 0,0818 \text{ A}$$

Sustituyendo el circuito equivalente del diodo en la figura P2.1.3 y utilizando la corriente obtenida anteriormente, podemos calcular la resistencia R .

$$15 - 0,8 = (50 + R)I$$

$$14,2 \simeq 4,09 + 0,0818 R$$

$$R \simeq \frac{10,1}{0,0818} \simeq 123,47 \text{ } \Omega$$

Si ponemos la resistencia de $120 \text{ } \Omega$ la corriente sobrepasará la calculada para la potencia disipada máxima, y en consecuencia se quemaría el diodo. Esto nos muestra que la resistencia que debemos utilizar es la de $147 \text{ } \Omega$, es decir, la respuesta es,

$$R = R_2 = 147 \text{ } \Omega$$